第五章 复数

§1 复数的概念及其几何意义

1.1 复数的概念

对点上分

1. BCD 【解析】由复数的定义可知 A 正确；

形如 $a+bi(a,b\in\mathbf{R})$ 的数，当 $b=0$ 时，它不是虚数，故 B 错误；

若两个复数全是实数，则可以比较大小，故 C 错误；

a,b 可以比较大小，所以 a,b 是实数，则 $a+i$ 和 $b+i$ 是虚数，两个虚数不能比较大小，故 D 错误.

2. ABD 【解析】若 $a=0$，且 $b\neq0$，则 $a+bi$ 为纯虚数，故 A 错误；

若 $z=3-2i$，则 $a=3,b=-2$，故 B 错误；

若 $b=0$，则 $a+bi=a$ 为实数，故 C 正确；

若 $a=b=0$，则 z 为实数，是复数，故 D 错误.

易错警示 对纯虚数的概念理解不透致错

当 $a=0,b\neq0$ 时，复数 $a+bi(a,b\in\mathbf{R})$ 为纯虚数，故 $a=0$ 不能推出复数 $a+bi(a,b\in\mathbf{R})$ 为纯虚数；复数 $a+bi(a,b\in\mathbf{R})$ 为纯虚数，则 $a=0$ 且 $b\neq0$，故复数 $a+bi(a,b\in\mathbf{R})$ 为纯虚数可推出 $a=0$，故 $a=0$ 是复数 $a+bi(a,b\in\mathbf{R})$ 为纯虚数的必要不充分条件.

3. C 【解析】复数 $2i-\sqrt{5}$ 的虚部为 2，又 $\sqrt{5}i+2i^2=-2+\sqrt{5}i$，则 $\sqrt{5}i+2i^2$ 的实部为 -2，所以新复数为 $2-2i$. 故 C 正确.

4. B 【解析】因为 $a^2+b+(a-b)i>2$，根据虚数不能比较大小，可得 $a^2+b+(a-b)i$ 为实数，所以 $a-b=0$ 且 $a^2+b>2$，即 $a^2+a-2>0$，解得 $a<-2$ 或 $a>1$. 故 B 正确.

5. 【解】(1) 若复数 z 为实数，则 $a^2-4a-21=0$，解得 $a=7$ 或 $a=-3$.

(2)若复数 z 为虚数,则 $a^2-4a-21\neq0$,解得 $a\neq7$ 且 $a\neq-3$,故 a 的取值范围为 $\{a|a\neq7$ 且 $a\neq-3, a\in\mathbf{R}\}$.

(3)若复数 z 为纯虚数,

则 $\begin{cases}a^2-6a-7=0,\\a^2-4a-21\neq0,\end{cases}$ 解得 $a=-1$.

易错警示 **根据复数类型求参时遗漏限制条件致错**

根据一个复数的类型求参数值,关键是要弄清楚复数的实部和虚部以及它们对复数分类的影响,然后再结合定义进行求解即可. 注意:复数 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$ 为纯虚数时,一定要满足 $a=0$ 且 $b\neq0$.

6. A 【解析】$\sqrt{2}i$ 不是实数,也就不是无理数,**故①错误**;

z_1 和 z_2 都是虚数,且它们的虚部相等,但是实部不一定相等,**故②错误**;

当 $a=b=0$ 时,$(a-b)+(a+b)i$ 为实数,当 $a=b\neq0$ 时,$2bi$ 是纯虚数,**故③错误. 故 A 正确.**

归纳总结 **复数相等的本质**

两个复数相等需要这两个复数的实部和虚部分别相等才可以,对于复数相等的题型,一般先化简并准确找出这两个复数的实部和虚部,再令其分别相等.

7. A 【解析】当 $x=y=1$ 时,$x+yi=1+i$ 显然成立,所以 $x=y=1$ 是 $x+yi=1+i$ 的充分条件;

当 $x=i, y=-i$ 时,$x+yi=1+i$,则 $x=y=1$ 不是 $x+yi=1+i$ 的必要条件. **故 A 正确.**

易错警示 **忽略复数相等的前提条件**

若本题规定 $x,y\in\mathbf{R}$,则 $x+yi=1+i$ 的充要条件是 $x=y=1$.

8. B 【解析】由 $i^2=-1$,得 $xi-2i^2=2+xi$,则 $2+xi=y+2yi$,根据复数相等的充要条件得 $\begin{cases}2=y,\\x=2y,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=4,\\y=2,\end{cases}$ 故 $x+yi=4+2i$. **故 B 正确.**

9. 2 【解析】$\because$ $(2x^2-3x-2)+(x^2-5x+$

6)i=0($x\in\mathbf{R}$),∴ $\begin{cases}2x^2-3x-2=0①,\\x^2-5x+6=0②,\end{cases}$ 解①得 $x=2$ 或 $x=-\dfrac{1}{2}$;解②得 $x=2$ 或 $x=3$.

∴ $x=2$.

1.2 复数的几何意义

对点上分

1. B 【解析】由 $z=-2+3i$ 可得其在复平面内对应的点的坐标为 $(-2,3)$. **故 B 正确.**

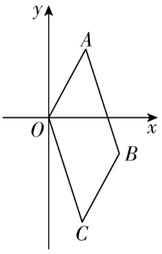
2. D 【解析】复数 $z=(a+2)-(a+3)i$ 在复平面上对应的点 Z 的坐标为 $(a+2,-(a+3))$,根据第二象限点的坐标特点可得 $\begin{cases}a+2<0,\\-(a+3)>0,\end{cases}$ 解得 $a<-3$. **故 D 正确.**

3. D 【解析】$z=(3m-2)+(m-1)i$ 的实部为 $3m-2$,虚部为 $m-1$,

因为 $\dfrac{2}{3}<m<1$, 所以 $0<3m-2<1$, $-\dfrac{1}{3}<m-1<0$,

所以复数 z 在复平面内对应的点 $(3m-2,m-1)$ 位于第四象限. **故 D 正确.**

4. A 【解析】设 $z_3=x+yi(x,y\in\mathbf{R})$,则 $C(x,y)$,依题意得 $A(1,2)$,$B(2,-1)$,$\overrightarrow{AB}=(1,-3)$,如图所示,由于四边形 $OABC$ 是平行四边形,所以 $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AB}$,即 $(x,y)=(1,-3)$,所以 $z_3=1-3i$. **故 A 正确.**



5. D 【解析】因为向量 $\overrightarrow{OA}$ 对应的复数为 $5+3i$,所以 $\overrightarrow{OA}=(5,3)$. 因为 $\overrightarrow{OB}$ 与 $\overrightarrow{OA}$ 关于 y 轴对称,所以向量 $\overrightarrow{OB}=(-5,3)$,对应的复数为 $-5+3i$,所以点 B 对应的复数是 $-5+3i$. **故 D 正确.**

规律总结 设复数 $z_1=a+bi$，$z_2=c+di(a,b,c,d\in\mathbf{R})$ 在复平面上对应的点分别为 Z_1,Z_2，(1)若 Z_1,Z_2 关于 x 轴对称，则 $a=c,b=-d$；(2)若 Z_1,Z_2 关于 y 轴对称，则 $a=-c,b=d$；(3)若 Z_1,Z_2 关于原点对称，则 $a=-c,b=-d$；(4)若 Z_1,Z_2 关于第一、三象限的角平分线对称，则 $a=d,b=c$. 对应向量的坐标也有上述规律.

6. C 【解析】连接 AC(图略).

由题可知，在复平面内 $A(2,2)$，设 $B(x_1,y_1)$，$C(x_2,y_2)$，

$\because$ 四边形 $OABC$ 是菱形，$\therefore \overrightarrow{OA}=\overrightarrow{CB}$，

且 $|\overrightarrow{OC}|=|\overrightarrow{OA}|$，即 $\begin{cases}x_1-x_2=2,\\ y_1-y_2=2,① \\ x_2^2+y_2^2=8,\end{cases}$

又 $\because \angle AOC=60°$，$\therefore \triangle AOC$ 是等边三角形，

$\therefore |\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{OA}|$，即 $(x_2-2)^2+(y_2-2)^2=8$，

即 $x_2^2+y_2^2-4(x_2+y_2)=0$，②

联立①②得，$x_2+y_2=2$，则 $x_2=2-y_2$，将其代入 $x_2^2+y_2^2=8$ 得，$(2-y_2)^2+y_2^2=8$，即 $y_2^2-2y_2-2=0$，则 $y_2=1\pm\sqrt{3}$，

当 $y_2=1+\sqrt{3}$ 时，$x_2=2-(1+\sqrt{3})=1-\sqrt{3}$，

$x_1=2+x_2=2+1-\sqrt{3}=3-\sqrt{3}$，

$y_1=2+y_2=3+\sqrt{3}$，$\therefore B(3-\sqrt{3},3+\sqrt{3})$；

当 $y_2=1-\sqrt{3}$ 时，$x_2=2-(1-\sqrt{3})=1+\sqrt{3}$，

$x_1=2+x_2=2+1+\sqrt{3}=3+\sqrt{3}$，

$y_1=2+y_2=2+1-\sqrt{3}=3-\sqrt{3}$，$\therefore B(3+\sqrt{3},3-\sqrt{3})$. **故 C 正确.**

7. A 【解析】因为 $z=1+2i$，所以 $|z|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$. **故选 A.**

8. A 【解析】由题意得 $|z|=\sqrt{(a-1)^2+(-2a)^2}=5$，即 $5a^2-2a-24=0$，解得 $a=-2$ 或 $a=\dfrac{12}{5}$. 因为 z 在复平面内对应的点位于第二象限，所以 $\begin{cases}a-1<0,\\ -2a>0,\end{cases}$ 解得 $a<0$，所以 $a=-2$，**故 A 正确.**

9. AB 【解析】若 $z\in\mathbf{R}$，则 $|z|\geqslant0$，若 $z=a+$

$bi(b\neq 0,a,b\in\mathbf{R})$，则 $|z|=\sqrt{a^2+b^2}>0$，**故 A 正确**；因为 $|z_1|=\sqrt{5}$，$|z_2|=\sqrt{(\sqrt{2})^2+(-\sqrt{3})^2}=\sqrt{5}$，$|z_3|=\sqrt{5}$，$|z_4|=\sqrt{2^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$，所以这些复数在复平面内对应的点均在以原点为圆心，$\sqrt{5}$ 为半径的圆上，**故 B 正确**；$|\cos\theta+i\sin\theta|=\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}=1$ 为定值，**故 C 错误**；$2+3i$ 和 $3+2i$ 的实部与虚部各不相同，故 $2+3i$ 和 $3+2i$ 不相等，**故 D 错误**.

10. A 【解析】对于 A，当 $t=-1$ 时，$M\cap\mathbf{R}=\{-2\}$，**故 A 错误**；对于 B，若 $z=0$，则 $\begin{cases}t-1=0,\\t+1=0,\end{cases}$ 此方程组无解，**故 B 正确**；对于 C，设 $z=x+yi(x,y\in\mathbf{R})\in M$，则 $y=x+2$，直线 $y=x+2$ 过一、二、三象限，一定不过第四象限，**故 C 正确**；对于 D，当 $t=-1$ 时，$z=-2$，满足 $|z|=2$，但 $z=-2$ 不是纯虚数，**故 D 正确**.

11. D 【解析】设 O 为复平面内的坐标原点，则 $|z|\leqslant 4$ 即 $|\overrightarrow{OZ}|\leqslant 4$，所以满足条件的点 Z 的集合就是以原点 O 为圆心，4 为半径的圆的内部(包含边界)；

$|z|\geqslant 2$ 即 $|\overrightarrow{OZ}|\geqslant 2$，所以满足条件的点 Z 的集合就是以原点 O 为圆心，2 为半径的圆的外部(包含边界).

因此满足 $2\leqslant|z|\leqslant 4$ 的点 z 的集合所构成的图形为以原点 O 为圆心，2 和 4 为半径的圆所夹的圆环(包含边界)，其面积为 $\pi\cdot 4^2-\pi\cdot 2^2=12\pi$，**故 D 正确**.

12. C 【解析】由复数的几何意义得 $z=2+3i$，从而 $\bar{z}=2-3i$，其虚部为 -3. **故选 C.**

13. A 【解析】由题可得，$\dfrac{a+1}{2}=-3$，解得 $a=-7$，**故 A 正确.**

§1 节测上分

1. A 【解析】复数 $1-2i$ 在复平面内对应的点为 $(1,-2)$，关于虚轴对称的点为 $(-1,-2)$，

所以 $z=-1-2i$，则 $\bar{z}=-1+2i$. **故 A 正确.**

2. D 【解析】由于复数 $-1+i$ 和 $1-i$ 对应的点分别为 $(-1,1)$，$(1,-1)$，所以这两点间的距离为 $\sqrt{(-1-1)^2+(1+1)^2}=2\sqrt{2}$.

故 D 正确.

3. C 【解析】复数 $z=3-4i$ 的虚部为 -4，故 A 错误；$|z|=|3-4i|=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$，故 B 错误；$\bar{z}=3+4i$，故 C 正确；$z$ 在复平面内对应的点的坐标为 $(3,-4)$，位于第四象限，故 D 错误.

4. C 【解析】设 $z=a+bi$，$a,b\in\mathbf{N}$，$2\leqslant|z|\leqslant 3$，即 $4\leqslant a^2+b^2\leqslant 9$. 当 $a=0$ 时，$b=2$ 或 $b=3$；当 $a=1$ 时，$b=2$；当 $a=2$ 时，$b=0$，$b=1$ 或 $b=2$；当 $a=3$ 时，$b=0$. 综上所述，共有 7 个点满足条件. 故 C 正确.

5. C 【解析】由 $2|z|^2-7|z|+3=0$，解得 $|z|=\frac{1}{2}$ 或 $|z|=3$. 当 $|z|=\frac{1}{2}$ 时，复数 z 在复平面内对应点的轨迹表示以原点为圆心，半径为 $\frac{1}{2}$ 的圆. 当 $|z|=3$ 时，复数 z 在复平面内对应点的轨迹表示以原点为圆心，半径为 3 的圆. 故 C 正确.

6. $(0,3)$ 【解析】由题意可知，复数对应的点的坐标为 (m^2-2m-3,m^2-4m)，该点位于第三象限内，则满足 $\begin{cases}m^2-2m-3<0,\\ m^2-4m<0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}-1<m<3,\\ 0<m<4,\end{cases}$ 所以 $0<m<3$.

7. $[1,5]$ 【解析】因为复数 $z_1=\cos\theta-(\lambda-2\sin\theta)i(\lambda,\theta\in\mathbf{R})$，$z_2=t-(3+t^2)i(t\in\mathbf{R})$，$z_1=z_2$，

所以 $\begin{cases}\cos\theta=t,\\ \lambda-2\sin\theta=3+t^2,\end{cases}$ 整理可得 $\lambda=-(\sin\theta-1)^2+5$，

当 $\sin\theta=-1$ 时，λ 取得最小值 1，

当 $\sin\theta=1$ 时，λ 取得最大值 5，

故 λ 的取值范围为 $[1,5]$.

8.【解】(1) $\because z_1=z_2$，$\therefore m=2\cos\theta\in[-2,2]$，又 z_1 为虚数，$\therefore 4-m^2\neq 0$，即 $m\neq\pm 2$，$\therefore m\in(-2,2)$.

(2) $\because z_1=z_2$，$\therefore\begin{cases}4-m^2=\lambda+3\sin\theta,\\ m=2\cos\theta,\end{cases}$ 消去 m 可得 $\lambda=4-4\cos^2\theta-3\sin\theta=4\sin^2\theta-3\sin\theta=4\left(\sin\theta-\frac{3}{8}\right)^2-\frac{9}{16}$，$\because -1\leqslant\sin\theta\leqslant 1$，$\therefore\lambda\in\left[-\frac{9}{16},7\right]$.

9. 思路导引 (1)根据复数 z_1 对应的点在第一象限,得到不等式,求出 m 的取值范围;(2)根据共轭复数和复数相等得到 $a=m,b=4-m^2$,从而得到 $|z_2|=\sqrt{\left(m^2-\frac{7}{2}\right)^2+\frac{15}{4}}$,结合(1)中 $m^2>4$,得到 $|z_2|$ 的取值范围.

【解】(1)复数 z_1 对应的点 Z_1 的坐标为 (m,m^2-4),

因为点 Z_1 在第一象限,所以 $\begin{cases}m>0,\\m^2-4>0,\end{cases}$ 解得 $m>2$,

提示:坐标平面内第一象限的点的横坐标和纵坐标均为正数

所以 m 的取值范围为 $(2,+\infty)$.

(2)因为 $\overline{z_1}=m+(4-m^2)\mathrm{i}=z_2$,所以 $a=m$,$b=4-m^2$,

所以 $|z_2|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{m^2+(4-m^2)^2}=\sqrt{m^4-7m^2+16}=\sqrt{\left(m^2-\frac{7}{2}\right)^2+\frac{15}{4}}$,

由(1)知 $m^2>4$,所以 $|z_2|>\sqrt{\left(4-\frac{7}{2}\right)^2+\frac{15}{4}}=2$,即 $|z_2|$ 的取值范围是 $(2,+\infty)$.

§2　复数的四则运算

2.1　复数的加法与减法

对点上分

1. B 【解析】由题意,不妨设 $z_1=a+b\mathrm{i}$,$z_2=c+d\mathrm{i}(a,b,c,d\in\mathbf{R})$.

若 z_1+z_2 是实数,则 $z_1+z_2=a+b\mathrm{i}+c+d\mathrm{i}=a+c+(b+d)\mathrm{i}\in\mathbf{R}$,故 $b+d=0$,即 $b=-d$,由于 a,c 不一定相等,故 z_1,z_2 不一定互为共轭复数,故充分性不成立;

若 z_1,z_2 互为共轭复数,则 $z_2=a-b\mathrm{i}$,故 $z_1+z_2=2a\in\mathbf{R}$,故必要性成立.

因此"z_1+z_2 是实数"是"z_1,z_2 互为共轭复数"的必要不充分条件. **故 B 正确.**

2. $4\sqrt{3}$ 【解析】设 $z_1=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$,$z_2=c+d\mathrm{i}(c,d\in\mathbf{R})$,所以 $z_1+z_2=a+b\mathrm{i}+c+d\mathrm{i}=a+c+(b+d)\mathrm{i}$. 又 $|z_1|=|z_2|=|z_1+z_2|=4$,所以 $a^2+b^2=16$,$c^2+d^2=16$,$(a+c)^2+$

$(b+d)^2=a^2+b^2+2ac+c^2+d^2+2bd=16$，所以 $2ac+2bd=-16$. 因为 $z_1-z_2=a+bi-(c+di)=a-c+(b-d)i$，所以 $|z_1-z_2|=\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}=\sqrt{a^2+b^2-2ac+c^2+d^2-2bd}=4\sqrt{3}$.

易错警示 误将复数的绝对值运算当作实数的绝对值运算致错

本题若混淆复数的绝对值运算和实数的绝对值运算，则会错误地得到 $z_1=z_2=z_1+z_2=\pm4$，从而认为题目无解. 在复数的绝对值运算中，若 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$，则 $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$，要注意与实数的绝对值运算的区别.

3.【解】(1) 原式 $=1-2+2+(3+1-3)i=1+i$.

(2) 原式 $=(2+1+3)+(-1-5+4)i=6-2i$.

(3) 原式 $=a-3a+(b+4b+5)i=-2a+(5b+5)i$.

4. D 【解析】复数 $6+5i$ 与 $-3+4i$ 分别对应向量 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$，因为 $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$，所以向量 $\overrightarrow{BA}$ 对应的复数为 $(6+5i)-(-3+4i)=9+i$. **故 D 正确**.

规律总结 复数的几何意义的简单运用

本题考查复数的几何意义的简单运用，难度较低. 复数 $z=a+bi$ 和复平面内的点 $Z(a,b)$ 一一对应，同时复数 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$ 和复平面内的向量 $\overrightarrow{OZ}=(a,b)$ (O 为坐标原点) 也一一对应.

5. D 【解析】由题图可知，$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{PQ}-\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{QP}=2\overrightarrow{QP}\neq\mathbf{0}$，则 $z_1-z_2-z_3=0$ 不成立，**故 A 错误**；

$\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{OQ}=2\overrightarrow{OQ}\neq\mathbf{0}$，则 $z_1+z_2+z_3=0$ 不成立，**故 B 错误**；

$\overrightarrow{PQ}-\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QO}+\overrightarrow{PO}=2\overrightarrow{PO}\neq\mathbf{0}$，$z_2-z_1-z_3=0$ 不成立，**故 C 错误**；

$\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PQ}-\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OQ}=\mathbf{0}$，所以有 $z_1+z_2-z_3=0$，**故 D 正确**.

6. A 【解析】在四边形 $OACB$ 内，若存在 $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$，则可知四边形 $OACB$ 为平行四边形. $\because$ 非零复数 z_1，z_2 分别对应复平面内的向量 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，则由复数加法的几何意义可知 $|z_1+z_2|$ 对应 $|\overrightarrow{OC}|$，$|z_1-z_2|$ 对应 $|\overrightarrow{AB}|$，则 $|\overrightarrow{OC}|=|\overrightarrow{AB}|$，

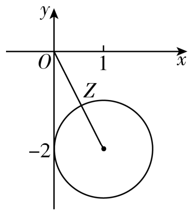
则平行四边形 $OACB$ 为矩形. $\therefore \overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$. 故 A 正确.

一题多解 易知 $z_2, -z_2$ 在复平面内对应的点 B, B_1 关于原点 O 对称，且 O 为 BB_1 的中点，若 $|z_1+z_2|=|z_1-z_2|$，则 z_1 在复平面内对应的点 A 到这两点的距离相等，即点 A 在 BB_1 的垂直平分线上，所以 $OA \perp OB$. 故 A 正确.

7. $\sqrt{5}-1$

攻略上分 观察可知，本题符合通法攻略 37 中的第 2 种情况，故可确定好 $|z-1+2i|=1$ 所表示的图形后，再分析求解.

【解析】根据复数模的几何意义可知，$|z-1+2i|=1$ 表示复数 z 在复平面内对应的点在以 $(1,-2)$ 为圆心，1 为半径的圆上，而 $|z|$ 表示复数 z 对应的点 Z 到原点的距离，画出图形如图所示，$|z|_{min}=\sqrt{1^2+(-2)^2}-1=\sqrt{5}-1$.



8. 【解】因为 $z \in \mathbf{C}$ 且 $|z+i|=3$，所以根据复数模的几何意义知，z 在复平面内对应的点的集合表示以 $(0,-1)$ 为圆心，3 为半径的圆，所以 $|z-3-3i|$ 表示圆上的点到点 $(3,3)$ 的距离，因为圆心 $(0,-1)$ 到点 $(3,3)$ 的距离为 $\sqrt{(0-3)^2+(-1-3)^2}=5$，所以 $|z-3-3i|_{max}=3+5=8$.

2.2 复数的乘法与除法+

*2.3 复数乘法几何意义初探

对点上分

1. C

攻略上分 本题为复数的乘法问题，利用通法攻略 38 中的思路和技巧求解即可.

【解析】由题意得 $z=(2-2i)i=2+2i$，故其虚部为 2. 故 C 正确.

2. D 【解析】$|z-i\bar{z}|=|1-i-i(1+i)|=|2-2i|=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$.

故 D 正确.

3. D 【解析】因为 $(3-4i)z=5$，所以 $z=\frac{5}{3-4i}=\frac{5(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)}=\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i$. 故 D 正确.

4. D 【解析】因为复数 $z_1=\frac{7+i}{3+4i}=\frac{(7+i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)}=1-i$，$z_2=3+mi$，所以 $z_1\cdot\overline{z_2}=(1-i)(3-mi)=(3-m)-(m+3)i$，因为 $z_1\cdot\overline{z_2}$ 为纯虚数，所以 $\begin{cases}3-m=0,\\m+3\neq0,\end{cases}$ 解得 $m=3$. 故 D 正确.

规律点拨 复数运算小结论

(1) $(1+i)^2=2i\leftrightarrow\frac{2i}{1+i}=1+i$;

(2) $(1-i)^2=-2i\leftrightarrow\frac{-2i}{1-i}=1-i\leftrightarrow\frac{2i}{i-1}=1-i$;

(3) $(1+i)(1-i)=2\leftrightarrow\frac{2}{1+i}=1-i\leftrightarrow\frac{2}{1-i}=1+i$;

(4) $\frac{1+i}{1-i}=i$，$\frac{1-i}{1+i}=-i$;

(5) $i^1=i$，$i^2=-1$，$i^3=-i$，$i^4=1$.

5. D

攻略上分 本题考查了 $i^n(n\in\mathbf{N}^*)$ 的周期性特点，可利用大招攻略 39 中的相关结论求解.

【解析】因为 $(2+3i)z=i^{2\,024}+8i^{2\,025}$，所以 $z=\frac{i^{2\,024}+8i^{2\,025}}{2+3i}=\frac{1+8i}{2+3i}=\frac{(1+8i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)}=2+i$，所以 $\bar{z}=2-i$，所以复数 $\bar{z}$ 在复平面内对应的点为 $(2,-1)$，位于第四象限. 故 D 正确.

6. B 【解析】由题意，$z^2=\left(\frac{i-1}{\sqrt{2}}\right)^2=-i$，则 $z+z^3+z^5+\cdots+z^{2\,025}=z(1+z^2+z^4+\cdots+z^{2\,024})=z[1+z^2+(z^2)^2+\cdots+(z^2)^{1\,012}]=z[1+(-i)+(-1)+i+1+\cdots+(-i)+(-1)+i+1]=z=\frac{i-1}{\sqrt{2}}$. 故 B 正确.

7. A 【解析】因为 $2+i$ 是关于 x 的方程 $x^2-mx+n=0$（m,n 为实数）的一个根，则 $2-i$ 是关于 x 的方程 $x^2-mx+n=0$ 的另一个根，则 $\begin{cases}m=2-i+2+i=4,\\n=(2-i)\times(2+i)=5,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}m=4,\\n=5,\end{cases}$

则 $m+n=9$. 故 A 正确.

一题多解 由 $2+\mathrm{i}$ 是关于 x 的方程 $x^2-mx+n=0$ 的一个根, 得 $(2+\mathrm{i})^2-m(2+\mathrm{i})+n=0$, 整理得 $3+n-2m+(4-m)\mathrm{i}=0$, 所以 $\begin{cases}3+n-2m=0,\\4-m=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=4,\\n=5,\end{cases}$ 则 $m+n=9$. 故 A 正确.

8. $\frac{1}{12}$ $-\frac{1}{2}$

攻略上分 本题可先设出实数根,再代入原方程,根据复数相等的充要条件列方程组求解,具体可见通法攻略 40.

【解析】设关于 x 的方程 $x^2+(1-2\mathrm{i})x+(3m-\mathrm{i})=0(m\in\mathbf{R})$ 有实数根 x_1, 则 $x_1^2+(1-2\mathrm{i})x_1+(3m-\mathrm{i})=0$, 即 $x_1^2+x_1+3m-(2x_1+1)\mathrm{i}=0$, 故 $\begin{cases}x_1^2+x_1+3m=0,\\2x_1+1=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=\frac{1}{12},\\x_1=-\frac{1}{2},\end{cases}$ 故 $m=\frac{1}{12}$, 方程的实数根为 $x_1=-\frac{1}{2}$.

名师点拨 在复数范围内解方程的一般思路

在复数范围内解方程的一般思路是依据题意设出方程的根,然后代入方程,利用复数相等的充要条件求解即可.

对于一元二次方程,也可以利用求根公式求解,要注意在复数范围内负数是能开方的,此外,根与系数的关系也是成立的. 在解这类题时,要注意不能利用判别式求解方程中参数的值.

9.【解】(1) $\because$ $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$ 对应的复数分别为 $7+\mathrm{i},3-2\mathrm{i}$, $\therefore$ $\overrightarrow{OA}=(7,1)$, $\overrightarrow{OB}=(3,-2)$,

$\therefore$ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(-4,-3)$,

$\therefore$ $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-4)^2+(-3)^2}=5$.

(2) $\because$ $(1+2\mathrm{i})\bar{z}=4+3\mathrm{i}$,

$\therefore$ $(1-2\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})\bar{z}=(1-2\mathrm{i})(4+3\mathrm{i})$,

$\therefore$ $5\bar{z}=10-5\mathrm{i}$, $\therefore$ $\bar{z}=2-\mathrm{i}$, $\therefore$ $z=2+\mathrm{i}$.

(3) ① $\because$ $z\in\mathbf{R}$, $\therefore$ $\begin{cases}m^2+2m-3=0,\\m-1\neq0,\end{cases}$

解得 $m=-3$.

②$\because z$ 是纯虚数,$\therefore \begin{cases} \dfrac{m(m-2)}{m-1}=0, \\ m-1\neq 0, \\ m^2+2m-3\neq 0, \end{cases}$

解得 $m=0$ 或 $m=2$.

10. A 【解析】$z_2=-8+6i=(3+4i)\cdot 2i$,即 $z_2=z_1\cdot 2i$. 复数 $z_1=3+4i$ 在复平面内对应的向量为 $\overrightarrow{OZ_1}$,对应的点为 $(3,4)$,将 $\overrightarrow{OZ_1}$ 按逆时针旋转 $\dfrac{\pi}{2}$ 得到 $\overrightarrow{OZ_1'}$,得到的对应点为 $Z_1'(-4,3)$,对应复数为 $-4+3i$,再拉伸 2 倍得到的向量的对应点为 $(-8,6)$,即得到 $\overrightarrow{OZ_2}$. **故 A 正确.**

§2 节测上分

1. B 【解析】由题意得 $z_1=1+2i, z_2=2+i$, $z_2-z_1=2-1+i-2i=1-i$,故 $\overrightarrow{Z_1Z_2}$ 对应的复数为 $1-i$. **故 B 正确.**

一题多解 由题意得 $\overrightarrow{Z_1Z_2}=(2,1)-(1,2)=(1,-1)$,故 $\overrightarrow{Z_1Z_2}$ 对应的复数为 $1-i$. **故 B 正确.**

2. A 【解析】因为 $z=1-i$,所以 $z+\dfrac{1}{z}=1-i+\dfrac{1}{1-i}=1-i+\dfrac{1+i}{(1-i)(1+i)}=1-i+\dfrac{1+i}{2}=\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}i$. **故 A 正确.**

3. D 【解析】设 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$,则 $2z+\bar{z}=2(a+bi)+a-bi=3a+bi=-3-2i$. 所以 $a=-1, b=-2$,故 $z=-1-2i$,**故 D 正确.**

名师点拨 **求解与复数概念相关问题的技巧**

复数的分类、复数相等、复数的模及共轭复数的概念都与复数的实部、虚部有关,所以解答与复数相关概念有关的问题时,需把所给复数化为代数形式,即 $a+bi(a,b\in\mathbf{R})$ 的形式,再根据题意求解.

4. A 【解析】因为 $z=2-i$,所以 $\bar{z}=2+i$,所以 $\dfrac{\bar{z}}{z-\bar{z}}=\dfrac{2+i}{2-i-(2+i)}=\dfrac{2+i}{-2i}=\dfrac{(2+i)\cdot i}{(-2i)\cdot i}=\dfrac{-1+2i}{2}=-\dfrac{1}{2}+i$. **故 A 正确.**

规律点拨 共轭复数结论

有关复数 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$ 的共轭复数的常用结论：

①$z+\bar{z}=2a$；

②$z-\bar{z}=2bi$；

③$|\bar{z}|=|z|$；

④$\overline{(\bar{z})}=z$；

⑤若 $\bar{z}=z$，则 z 为实数；

⑥若 $\bar{z}=-z$ 且 $z\neq0$，则 z 为纯虚数.

5. C 【解析】由题意得 $\overrightarrow{OZ}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$，$z=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$.

将向量 $\overrightarrow{OZ}$ 绕点 O 逆时针旋转 $90°$ 后得到向量 $\overrightarrow{OZ_1}$，由复数乘法的几何意义，得 $z_1=z\cdot i=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$，则 $z_1^2=\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2=\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}i+\frac{3}{4}i^2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$，$z_1^4=\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2=\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}i+\frac{3}{4}i^2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$，$z_1^5=z_1^4\cdot z_1=\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2=\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}i+\frac{3}{4}i^2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$. **故 C 正确.**

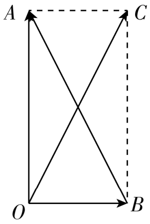
6. C 【解析】$z=(1+i)(1-ai)=a+1+(1-a)i$，若 $-1<a<1$，则 $a+1>0$，$1-a>0$，故复数 z 在复平面内所对应的点位于第一象限，若复数 z 在复平面内所对应的点位于第一象限，则 $\begin{cases}a+1>0,\\1-a>0,\end{cases}$ 可得 $-1<a<1$，故“$-1<a<1$”是“复数 z 在复平面内所对应的点位于第一象限”的充要条件. **故 C 正确.**

7. ABD 【解析】$z=(1-ai)(3+2i)=3+2a+(2-3a)i$，

若复数 z 为纯虚数，则 $3+2a=0$ 且 $2-3a\neq0$，得 $a=-\frac{3}{2}$，**故 A 正确**；若复数 z 为实数，则 $2-3a=0$，得 $a=\frac{2}{3}$，**故 B 正确**；若复数 z 的模为 $\sqrt{13}$，则 $(3+2a)^2+(2-3a)^2=13+13a^2=13$，得 $a=0$，**故 C 错误**；若复数 z 在复平面内对应的点在第一象限，则 $3+2a>0$ 且 $2-3a>0$，得 $-\frac{3}{2}<$

$a<\frac{2}{3}$,故 D 正确.

8. C 【解析】设 O 为复平面内的原点,$\overrightarrow{OA}$ 对应的复数为 z_1,$\overrightarrow{OB}$ 对应的复数为 z_2,则 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ 对应的复数为 z_1+z_2,$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$ 对应的复数为 z_1-z_2,$|z_1|=2\sqrt{5}$,$|z_2|=\sqrt{5}$,且 $|z_1-z_2|=5$,由勾股定理逆定理可知,$\triangle AOB$ 为直角三角形,且 $|\overrightarrow{BA}|=5$. 作长方形 $AOBC$,如图所示,则 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$ 对应的复数为 z_1+z_2,故 $|z_1+z_2|=|\overrightarrow{OC}|=|\overrightarrow{BA}|=5$. 故 C 正确.



9. 【解】(1)若 α,β 为实数,则 $\Delta=1-4m\geqslant 0$,即 $m\leqslant\frac{1}{4}$.

由根与系数的关系可得 $\begin{cases}\alpha+\beta=-1,\\ \alpha\beta=m,\end{cases}$ 所以 $|\alpha-\beta|=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}=\sqrt{1-4m}=3$,解得 $m=-2$,符合题意.

若 α,β 为虚数,则 $\Delta=1-4m<0$,即 $m>\frac{1}{4}$. 由根与系数的关系可得 $\begin{cases}\alpha+\beta=-1,\\ \alpha\beta=m.\end{cases}$

设 $\alpha=a+b\mathrm{i}$,$\beta=a-b\mathrm{i}$($a,b\in\mathbf{R}$ 且 $b>0$),则 $|\alpha-\beta|=|2b\mathrm{i}|=2b=3$,解得 $b=\frac{3}{2}$.

因为 $\alpha+\beta=2a=-1$,所以 $a=-\frac{1}{2}$,所以 $m=\alpha\beta=(a+b\mathrm{i})(a-b\mathrm{i})=a^2+b^2=\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{5}{2}$,符合题意.

综上,m 的值为 -2 或 $\frac{5}{2}$.

(2)当 α,β 为实数,即 $m\leqslant\frac{1}{4}$ 时,$(|\alpha|+|\beta|)^2=9$,即 $\alpha^2+\beta^2+2|\alpha\beta|=9$,所以 $(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+2|\alpha\beta|=9$,所以 $1-2m+2|m|=9$. 当 $0\leqslant m\leqslant\frac{1}{4}$ 时,此方程无解;当 $m<0$ 时,$m=-2$.

当 α,β 为一对共轭虚数,即 $m>\frac{1}{4}$ 时,$\beta=\overline{\alpha}$.

由 $|\alpha|+|\beta|=3$,可知 $|\alpha|=\frac{3}{2}$,则 $m=\alpha\cdot$

$\overline{\alpha}=|\alpha|^2=\dfrac{9}{4}$.

综上，m 的值为 -2 或 $\dfrac{9}{4}$.

* §3　复数的三角表示

3.1　复数的三角表示式+

3.2　复数乘除运算的几何意义

对点上分

1. B　【解析】$-1-\sqrt{3}\,\mathrm{i}=2\left(-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)=2\left[\cos\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)\right]$，故 B 正确.

名师点拨　复数的代数形式化为三角形式的步骤

①先求出复数的模；②确定辐角所在的象限；③根据象限求出辐角；④求出复数的三角形式.

2. C　【解析】令 $x=-\sin\dfrac{\pi}{7}<0$，$y=\cos\dfrac{\pi}{7}>0$，则 $z=-\sin\dfrac{\pi}{7}+\mathrm{i}\cos\dfrac{\pi}{7}=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{7}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{7}\right)=\cos\dfrac{9\pi}{14}+\mathrm{i}\sin\dfrac{9\pi}{14}$，所以所求辐角的主值为 $\dfrac{9\pi}{14}$. 故 C 正确.

名师点拨　复数的三角形式必须满足的条件

①$r\geqslant 0$；②θ 前后一致，可取任意值；③一般 $\sin\theta$ 在后且与 i 相乘；④$\cos\theta$ 与 $\mathrm{i}\sin\theta$ 之间用加号连接.

3. BD　【解析】设 $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$，$\theta\in[0,2\pi)$，则 $z^2=r^2(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^2=r^2(\cos 2\theta+\mathrm{i}\sin 2\theta)$，若 $\theta\in[\pi,2\pi)$，$2\theta\geqslant 2\pi$，则 z^2 的辐角的主值为 $2\theta-2\pi$，故 A 不正确；

$\overline{z}=r(\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta)=r[\cos(2\pi-\theta)+\mathrm{i}\sin(2\pi-\theta)]$，$\overline{z}$ 的辐角的主值为 $2\pi-\theta$，故 B 正确；

设 $z_1=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)$，$\theta_1\in[0,2\pi)$，$z_2=r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)$，$\theta_2\in[0,2\pi)$，$z_1z_2=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)]$，若 $\theta_1+\theta_2\geqslant 2\pi$，则 z_1z_2 的辐角的主值为 $\theta_1+\theta_2-2\pi$，故 C 不正确；

$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1-\theta_2)]$，所以$\frac{z_1}{z_2}$的辐角的主值是 $\theta_1-\theta_2$，**故 D 正确.**

4. ABC 【解析】由 $z_2=2\sqrt{2}\cdot(\sin 30°-\mathrm{i}\cos 30°)=2\sqrt{2}\cdot(\cos 300°+\mathrm{i}\sin 300°)$，所以 $z_1\cdot z_2=\sqrt{2}(\cos 60°+\mathrm{i}\sin 60°)\cdot 2\sqrt{2}\cdot(\cos 300°+\mathrm{i}\sin 300°)=4(\cos 360°+\mathrm{i}\sin 360°)=4(\cos 0°+\mathrm{i}\sin 0°)$，**故 A，B，C 错误，D 正确.**

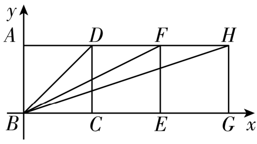
5. 【解】(1) 原式 $=\sqrt{6}\left[\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{5\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{5\pi}{6}\right)\right]=\sqrt{6}\left(\cos\frac{11\pi}{12}+\mathrm{i}\sin\frac{11\pi}{12}\right)$.

(2) 原式 $=21\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{3\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{3\pi}{4}\right)\right]=21\left(\cos\frac{11\pi}{12}+\mathrm{i}\sin\frac{11\pi}{12}\right)$.

(3) 原式 $=\frac{6}{3}[\cos(70°-40°)+\mathrm{i}\sin(70°-40°)]=2(\cos 30°+\mathrm{i}\sin 30°)$.

6. B 【解析】由已知得 $z_1=-\sqrt{2}+\sqrt{2}\mathrm{i}=2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right)=2\left(\cos\frac{3\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{4}\right)$，所以 $\overrightarrow{OZ_1}$ 绕原点顺时针旋转 $\frac{3\pi}{4}$ 得 $2\left(\cos\frac{3\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{4}\right)\cdot\left[\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right]=2(\cos 0+\mathrm{i}\sin 0)=2$，又因为 $\overrightarrow{OZ_2}$ 绕原点逆时针旋转$\frac{4\pi}{3}$所得向量与 $\overrightarrow{OZ_1}$ 旋转后所得向量的终点重合，所以 $z_2\left(\cos\frac{4\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{4\pi}{3}\right)=2$，所以 $z_2=\frac{2}{\cos\frac{4\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{4\pi}{3}}=2\left(\cos\frac{4\pi}{3}-\mathrm{i}\sin\frac{4\pi}{3}\right)=-1+\sqrt{3}\mathrm{i}$. **故 B 正确.**

7. 【证明】以 B 为坐标原点，以 $\overrightarrow{BC}$ 方向为 x 轴的正方向，$\overrightarrow{BA}$ 方向为 y 轴的正方向建立平面直角坐标系，如图所示.



令$|\overrightarrow{AB}|=1$，可得点 $D(1,1)$，$F(2,1)$，$H(3,1)$，所以 $\overrightarrow{BD}$，$\overrightarrow{BF}$，$\overrightarrow{BH}$ 对应的复数分别为 $z_1=1+\mathrm{i}$，$z_2=2+\mathrm{i}$，$z_3=3+\mathrm{i}$，所以 $\angle DBC$，$\angle FBE$，$\angle HBG$ 分别为 z_1，z_2，z_3 的辐角，且 $|z_1|=\sqrt{2}$，$|z_2|=\sqrt{5}$，$|z_3|=\sqrt{10}$，可得 $z_1\cdot z_2\cdot z_3=(1+\mathrm{i})(2+\mathrm{i})(3+\mathrm{i})=\sqrt{2}(\cos\angle DBC+\mathrm{i}\sin\angle DBC)\cdot\sqrt{5}(\cos\angle FBE+\mathrm{i}\sin\angle FBE)\cdot\sqrt{10}(\cos\angle HBG+\mathrm{i}\sin\angle HBG)=10[\cos(\angle DBC+\angle FBE+\angle HBG)+\mathrm{i}\sin(\angle DBC+\angle FBE+\angle HBG)]=10\mathrm{i}=10\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$，又因为$(\angle DBC+\angle FBE+\angle HBG)\in(0,2\pi)$，所以 $\angle DBC+\angle FBE+\angle HBG=\dfrac{\pi}{2}$.

真题上分

1. C 【解析】$(1+5\mathrm{i})\mathrm{i}=\mathrm{i}+5\mathrm{i}^2=-5+\mathrm{i}$，则虚部为 1. **故选** C.

2. A 【解析】由 $z=1+\mathrm{i}$，得 $\dfrac{1}{z-1}=\dfrac{1}{\mathrm{i}}=\dfrac{\mathrm{i}}{\mathrm{i}^2}=-\mathrm{i}$. **故选** A.

3. C 【解析】因为 $\dfrac{z}{z-1}=1+\mathrm{i}$，所以 $z=(1+\mathrm{i})(z-1)=(1+\mathrm{i})z-(1+\mathrm{i})$，

整理可得，$\mathrm{i}z=1+\mathrm{i}$，即 $z=\dfrac{1+\mathrm{i}}{\mathrm{i}}=\dfrac{(1+\mathrm{i})(-\mathrm{i})}{\mathrm{i}(-\mathrm{i})}=1-\mathrm{i}$. **故选** C.

一题多解 由 $\dfrac{z}{z-1}=1+\mathrm{i}$，可得 $\dfrac{z-1+1}{z-1}=1+\mathrm{i}$，即 $1+\dfrac{1}{z-1}=1+\mathrm{i}$，所以 $\dfrac{1}{z-1}=\mathrm{i}$，所以 $z-1=\dfrac{1}{\mathrm{i}}=-\mathrm{i}$，所以 $z=1-\mathrm{i}$，**故选** C.

4. C 【解析】$\dfrac{z}{\mathrm{i}}=-1-\mathrm{i}$，则 $z=\mathrm{i}(-1-\mathrm{i})=-\mathrm{i}-\mathrm{i}^2=1-\mathrm{i}$，**故选** C.

5. A 【解析】因为 $z=5+\mathrm{i}$，所以 $\bar{z}=5-\mathrm{i}$，所以 $\mathrm{i}(\bar{z}+z)=\mathrm{i}(5-\mathrm{i}+5+\mathrm{i})=10\mathrm{i}$，**故选** A.

6. A 【解析】$z=\dfrac{1-\mathrm{i}}{2+2\mathrm{i}}=\dfrac{(1-\mathrm{i})^2}{2(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=\dfrac{-2\mathrm{i}}{4}=-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$，则 $\bar{z}=\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$，$\therefore z-\bar{z}=-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}-$

$\frac{1}{2}i=-i$，**故选** A.

7. B　【解析】因为 $z=\frac{2+i}{1+i^2+i^5}=\frac{2+i}{1+(-1)+i}=\frac{2+i}{i}=-(2+i)i=1-2i$，所以 $\bar{z}=1+2i$，**故选** B.

8. C　【解析】$(a+i)(1-ai)=a-a^2i+i+a=2a+(1-a^2)i=2$，所以 $\begin{cases}2a=2,\\1-a^2=0,\end{cases}$ 解得 $a=1$，**故选** C.

9. D　【解析】由 $i(1-z)=1$，得 $z=1-\frac{1}{i}=1+i$，所以 $z+\bar{z}=1+i+1-i=2$，**故选** D.

10. D　【解析】$(2+2i)(1-2i)=2-4i+2i+4=6-2i$，**故选** D.

11. A　【解析】依题意可得 $1-2i+a(1+2i)+b=0$，根据复数相等的充要条件可得 $\begin{cases}1+a+b=0,\\-2+2a=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=1,\\b=-2,\end{cases}$ **故选** A.

易错警示　两复数相等的充要条件：实部与实部相等，虚部与虚部相等.

12. C　【解析】因为 $z=-1+\sqrt{3}i$，所以 $z\bar{z}=(-1)^2+(\sqrt{3})^2=4$，

所以 $\frac{z}{z\bar{z}-1}=\frac{-1+\sqrt{3}i}{4-1}=\frac{-1+\sqrt{3}i}{3}=-\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}i$，

故选 C.

13. B　【解析】由 $i\cdot z+2=2i$，得 $z=\frac{2i-2}{i}=2+2i$，

则 $|z|=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$. **故选** B.

一题多解　由题知 $z=\frac{2i-2}{i}$，则 $|z|=\frac{\sqrt{2^2+(-2)^2}}{1}=2\sqrt{2}$. **故选** B.

14. C　【解析】由 $z=-1-i$，得 $|z|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$. **故选** C.

一题多解　由题可得，复数 $z=-1-i$ 在复平面内对应点 $(-1,-1)$. 根据复数的几何意义，$|z|$ 等于点 $(-1,-1)$ 到坐标原点的距离，则 $|z|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$. **故选** C.

15. D　【解析】根据复数的几何意义得 $z=-1+\sqrt{3}i$，所以 $\bar{z}=-1-\sqrt{3}i$，**故选** D.

16. $\sqrt{10}$

攻略上分 本题为复数除法的求模问题，除常规解法外，也可利用求模模型的常见公式求解，具体可见通法攻略 41.

【解析】因为 $\frac{3+i}{i}=\frac{(3+i)\cdot i}{i^2}=\frac{-1+3i}{-1}=1-3i$，所以 $\left|\frac{3+i}{i}\right|=|1-3i|=\sqrt{1^2+(-3)^2}=\sqrt{10}$.

一题多解 $\left|\frac{3+i}{i}\right|=\frac{|3+i|}{|i|}=\frac{\sqrt{3^2+1^2}}{\sqrt{1^2}}=\sqrt{10}$.

素养上分

1. **思路导引** (1)利用一元三次方程根与系数的关系求解即可；(2)由题意可设 $z_1=0$，由已知计算可令 $z_2=6$，$z_3=3+4i$，得出三角形三个顶点的坐标，利用等面积法计算即可求得内切圆半径.

【解】(1)令 $x^3-6x^2+11x-6=(x-1)(x-x_2)(x-x_3)$，$x_2<x_3$，

利用一元三次方程根与系数的关系可得 $1+x_2+x_3=6$，$x_2\cdot x_3=6$，解得 $x_2=2$，$x_3=3$.

(2)根据三次方程根与系数的关系可知，z_1,z_2,z_3 为 $x^3-(9+4i)x^2+(18+24i)x=0$ 的三个根，

其中必有一个根为 0，不妨设 $z_1=0$，则 z_2,z_3 为 $x^2-(9+4i)x+(18+24i)=0$ 的两个根，

分解因式得 $(x-6)(x-3-4i)=0$，不妨令 $z_2=6$，$z_3=3+4i$，

所以 $\triangle ABC$ 的三个顶点为 $A(0,0)$，$B(6,0)$，$C(3,4)$，

设 $\triangle ABC$ 内切圆的圆心为 I，半径为 r，则 $\triangle ABC$ 的面积 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle IAB}+S_{\triangle IBC}+S_{\triangle IAC}$，

即 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}(|AB|+|BC|+|CA|)\cdot r$.

因为 $|AB|=6$，$|BC|=5$，$|CA|=5$，$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times6\times4=12$，

所以 $r=\frac{2S_{\triangle ABC}}{|AB|+|BC|+|CA|}=\frac{3}{2}$.

2. 【解】(1)依题意，$\omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=\cos\frac{2\pi}{3}+$

$\mathrm{i}\sin\dfrac{2\pi}{3}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\frac{2\pi}{3}}$，所以 $\omega^{2\,024}=(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\frac{2\pi}{3}})^{2\,024}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\frac{4\,048\pi}{3}}=\cos\dfrac{4\,048\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\dfrac{4\,048\pi}{3}=\cos\dfrac{4\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\dfrac{4\pi}{3}=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.

(2) 设 $x=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，则 $x^6=(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^6=(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^6=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot 6\theta}=\cos 6\theta+\mathrm{i}\sin 6\theta=1$,

因此 $\sin 6\theta=0$，$\cos 6\theta=1$，$6\theta=2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，解得 $\theta=\dfrac{k\pi}{3}$，$k\in\mathbf{Z}$,

由终边相同的角的意义，取 $k=0,1,2,3,4,5$，则对应的 θ 依次为 $0,\dfrac{\pi}{3},\dfrac{2\pi}{3},\pi,\dfrac{4\pi}{3},\dfrac{5\pi}{3}$,

因此对应的 x 依次为 $1,\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i},-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i},-1,-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i},\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$,

所以所求的集合是 $\left\{1,\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i},-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i},-1,-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i},\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right\}$.

(3) 当 $z=\cos\dfrac{\pi}{1\,012}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{1\,012}$ 时，$z^n=\left(\cos\dfrac{\pi}{1\,012}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{1\,012}\right)^n=\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\frac{\pi}{1\,012}}\right)^n=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\frac{n\pi}{1\,012}}$，$n\in\mathbf{Z}$，则 $(z^n)^{2\,024}=\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\frac{n\pi}{1\,012}}\right)^{2\,024}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot 2n\pi}=\cos 2n\pi+\mathrm{i}\sin 2n\pi=1$，$n\in\mathbf{N}$，$n\leqslant 2\,023$,

故关于 x 的方程 $x^{2\,024}-1=0$ 的根为 $x=1$，$x=z$，$x=z^2$，$x=z^3$，$\cdots$，$x=z^{2\,023}$,

则 $x^{2\,024}-1=(x-1)(x-z)(x-z^2)\cdot(x-z^3)\cdots(x-z^{2\,023})$,

又 $x^2-1=(x-1)(1+x)$，$x^3-1=(x-1)(1+x+x^2)$，$x^4-1=(x-1)(1+x+x^2+x^3)$，$\cdots$,

由此可得 $x^{2\,024}-1=(x-1)(1+x+x^2+\cdots+x^{2\,023})$,

则 $(x-z)(x-z^2)(x-z^3)\cdots(x-z^{2\,023})=1+x+x^2+\cdots+x^{2\,023}$,

令 $x=1$，得 $(1-z)(1-z^2)(1-z^3)\cdots(1-z^{2\,023})=1+1+1^2+\cdots+1^{2\,023}=2\,024$，又 $2\,023$ 为奇数,

所以 $(z-1)(z^2-1)(z^3-1)\cdots(z^{2\,023}-1)=$

$-2\ 024$.

3. 思路导引 设 z_1,z_2,z_1+2z_2 对应的点分别为 $P,Q,M,A(2,0),B(0,2)$，由题意知 $|AB|=2\sqrt{2}$，$|OQ|=1$，且 $|\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OP}|=2|\overrightarrow{OQ}|=|\overrightarrow{PM}|=2$，即可分析出点 M 的轨迹，最后利用矩形和圆的面积公式求面积即可.

【解】在复平面内，设 z_1 对应的点为 P，点 P 在线段 AB 上运动，

其中 $A(2,0)$，$B(0,2)$，$|AB|=2\sqrt{2}$，

设 z_2 对应的点为 Q，点 Q 在以坐标原点为圆心的单位圆上运动，$|OQ|=1$，

设 z_1+2z_2 对应的点为 M，则 $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+2\overrightarrow{OQ}$，

所以 $|\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OP}|=2|\overrightarrow{OQ}|=2$，

则 $|\overrightarrow{PM}|=2$，

即点 M 在以 P 点为圆心、2 为半径的圆上运动，

当点 P 在线段 AB 上运动时，

点 M 在复平面上扫过的图形为一个矩形(长、宽分别为 4 和 $2\sqrt{2}$)和两个半圆(半径为 2)，

面积为 $2\sqrt{2}\times4+\pi\cdot2^2=8\sqrt{2}+4\pi$.

第五章 全章上分

1. A 【解析】因为 $(1+3i)(3-i)=3+8i-3i^2=6+8i$，所以它对应的点为 $(6,8)$，位于第一象限. **故 A 正确.**

2. C 【解析】$z=1-2i$ 的共轭复数为 $\bar{z}=1+2i$，**故 A 错误**；$z=3+i$ 不是纯虚数，**故 B 错误**；$z=3+i$ 的实部为 3，虚部为 1，所以实部大于虚部，**故 C 正确**；$z=1-2i$ 的虚部为 -2，**故 D 错误.**

3. C 【解析】$\because$ 复数 $z=\left(\cos\theta-\frac{4}{5}\right)+\left(\sin\theta-\frac{3}{5}\right)i$ 是纯虚数，$\therefore \cos\theta-\frac{4}{5}=0$，$\sin\theta-\frac{3}{5}\neq0$，$\therefore \cos\theta=\frac{4}{5}$，$\sin\theta=-\frac{3}{5}$，$\therefore \tan\theta=-\frac{3}{4}$，则 $\tan\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\theta-1}{1+\tan\theta}=\frac{-\frac{3}{4}-1}{1-\frac{3}{4}}=-7$. **故 C 正确.**

4. D 【解析】$\frac{-2+ai}{i}=\frac{(-2+ai)\cdot(-i)}{i\cdot(-i)}=a+$

$2i$，$\because \dfrac{-2+ai}{i}$与 $3+bi$ 互为"共胚复数"，$\therefore a=-3,b=2$. 则 $a+b=-1$. **故 D 正确.**

5. A　【解析】因为 $z=\dfrac{3+4i}{2+i}$，所以 $|z|=\left|\dfrac{3+4i}{2+i}\right|=\dfrac{|3+4i|}{|2+i|}=\dfrac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$，由共轭复数的性质知，$|\bar{z}|=|z|=\sqrt{5}$，**故 A 正确.**

6. C　【解析】因为$(2-i)\alpha=3-4i$，所以 $\alpha=\dfrac{3-4i}{2-i}=2-i$，且 $\beta=m-i$，$m>0$，则 $\alpha+\beta=2+m-2i$. 又因为 $\alpha+\beta$ 是关于 x 的方程 $x^2-nx+13=0(n>0)$ 的一个根，可知 $2+m+2i$ 是方程的另一个根，由根与系数的关系可得

$$\begin{cases}(2+m-2i)(2+m+2i)=(2+m)^2+4=13,\\(2+m-2i)+(2+m+2i)=4+2m=n,\end{cases}$$

解得$\begin{cases}m=1,\\n=6\end{cases}$或$\begin{cases}m=-5,\\n=-6\end{cases}$（舍去），所以 $m+n=7$. **故 C 正确.**

7. C　【解析】若 z_1,z_2 皆是实数，则 z_1-z_2 一定不是虚数，因此当"z_1-z_2 为虚数"成立时，"z_1,z_2 中至少有一个为虚数"成立，即必要性成立；当 z_1,z_2 中至少有一个为虚数时，z_1-z_2 不一定是虚数，如 $z_1=z_2=i$，即充分性不成立，**故 C 正确.**

8. C　【解析】$z=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i=\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}$，则 $z^{2\,024}=\cos\left(2\,024\times\dfrac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(2\,024\times\dfrac{2\pi}{3}\right)=\cos\dfrac{4\pi}{3}+i\sin\dfrac{4\pi}{3}=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$，其虚部为$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **故 C 正确.**

9. BC　【解析】设 $z=a+bi(a>0,b>0,a,b\in\mathbf{R})$，由 $|z|=|z-1|=1$，得 $\begin{cases}a^2+b^2=1,\\(a-1)^2+b^2=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=\dfrac{1}{2},\\b=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=\dfrac{1}{2},\\b=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$（舍去），$\therefore z=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$，复数 z 的虚部为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，**故 A 错误**；$\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i}=\dfrac{\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i}{\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$，**故 B**

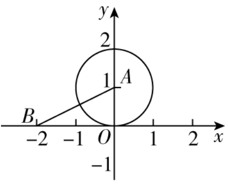
正确；$z^2=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)^2=\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}+\frac{3}{4}\mathrm{i}^2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}-1=z-1$，**故 C 正确**；$\bar{z}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，**故 D 错误**.

10. ACD 【解析】设 $z_1=a+b\mathrm{i}, z_2=c+d\mathrm{i}, a, b, c, d\in\mathbf{R}$，则 $\overline{z_1}=a-b\mathrm{i}, \overline{z_2}=c-d\mathrm{i}$，对于 A，$\overline{z_1+z_2}=\overline{(a+b\mathrm{i})+(c+d\mathrm{i})}=\overline{(a+c)+(b+d)\mathrm{i}}=(a+c)-(b+d)\mathrm{i}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$，**故 A 正确**；对于 B，取 $z_1=2\mathrm{i}, z_2=\mathrm{i}$，满足 $|z_1|>|z_2|$，而 $z_1^2=-4<-1=z_2^2$，**故 B 错误**；对于 C，$z_1z_2=(a+b\mathrm{i})(c+d\mathrm{i})=(ac-bd)+(bc+ad)\mathrm{i}$，$|z_1z_2|=\sqrt{(ac-bd)^2+(bc+ad)^2}=\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}=|z_1||z_2|$，**故 C 正确**；对于 D，若 $|z-2\mathrm{i}|\leqslant\sqrt{2}$，则复平面内表示复数 z 的点的集合是以 $(0,2)$ 为圆心，$\sqrt{2}$ 为半径的圆及其内部，因此点 Z 的集合所构成的图形的面积为 2π，**故 D 正确**.

11. BD 【解析】对于 A，将 $\overrightarrow{OZ_1}$ 绕点 O 按逆时针方向旋转 $90°$ 得到 $\overrightarrow{OZ_2}$，则 $\overrightarrow{OZ_2}$ 对应的复数为 $(\sqrt{3}+\mathrm{i})(\cos 90°+\mathrm{i}\sin 90°)=(\sqrt{3}+\mathrm{i})\cdot\mathrm{i}=-1+\sqrt{3}\mathrm{i}$，**故 A 错误**；

对于 B，设 $z=a+b\mathrm{i}(a, b\in\mathbf{R})$，则 $\bar{z}=a-b\mathrm{i}$，所以 $z\cdot\bar{z}=(a+b\mathrm{i})(a-b\mathrm{i})=a^2+b^2$，因为 $|z|^2=a^2+b^2$，所以 $z\cdot\bar{z}=|z|^2$，**故 B 正确**；

对于 C，设 $z=x+y\mathrm{i}(x, y\in\mathbf{R})$，如图所示，由 $|z-\mathrm{i}|=1$ 可知复数 z 在复平面内对应的点的集合表示以 $A(0,1)$ 为圆心，1 为半径的圆，所以 $|z+2|$ 表示圆上的点 (x,y) 到点 $B(-2,0)$ 的距离，又 $|AB|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$，所以 $|z+2|$ 的最大值为 $\sqrt{5}+1$，**故 C 错误**；



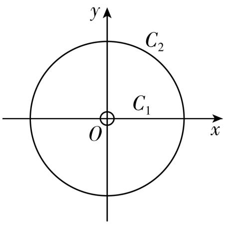
对于 D，$z=-3-\sqrt{3}\mathrm{i}=2\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)=2\sqrt{3}\left(\cos\frac{7\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{6}\right)$，所以辐角的主值为 $\frac{7\pi}{6}$，**故 D 正确**.

12. 6 【解析】由题意得 $\begin{cases}x^2-5x-6=0,\\x-1\geqslant 0,\end{cases}$ 即

$\begin{cases}(x-6)(x+1)=0,\\ x\geqslant 1,\end{cases}$ 解得 $x=6$.

13. $-\frac{1+\sqrt{3}\,i}{2}$　【解析】$\left(\frac{\sqrt{3}\,i-1}{2}\right)^2=\frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}$, $\left(\frac{\sqrt{3}\,i-1}{2}\right)^3=\frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}\cdot\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}=1$, 即 $\left(\frac{\sqrt{3}\,i-1}{2}\right)^{2\,024}=\left[\left(\frac{\sqrt{3}\,i-1}{2}\right)^3\right]^{674}\times\left(\frac{\sqrt{3}\,i-1}{2}\right)^2=-\frac{1+\sqrt{3}\,i}{2}$.

14. $[8,10]$　【解析】根据复数的模的几何意义可知,复数 z_1 在复平面内对应的点在以原点为圆心,1 为半径的圆 C_1 上,复数 z_2 在复平面内对应的点在以原点为圆心,3 为半径的圆上,复数 z_2^2 对应的点在以原点为圆心,9 为半径的圆 C_2 上,则 $|z_1-z_2^2|$ 的几何意义为圆 C_2 上的点到圆 C_1 上的点的距离,作出示意图如图所示,可知 $8\leqslant|z_1-z_2^2|\leqslant 10$.



15.【解】(1) $(2-i)(-1+5i)(3+4i)+2i=(3+11i)(3+4i)+2i=-35+45i+2i=-35+47i$.

(2) $z=(1-i)^2+1+3i=-2i+1+3i=1+i$,

由 $z^2+az+b=1-i$,得 $(a+b)+(2+a)i=1-i$, ∴ $\begin{cases}a+b=1,\\ 2+a=-1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-3,\\ b=4.\end{cases}$

16.【解】(1) 因为 $x_1=1-2i$ 是方程的根,所以 $(1-2i)^2+a(1-2i)+b=0$,即 $a+b-3-(4+2a)i=0$,所以 $\begin{cases}a+b-3=0,\\ -4-2a=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-2,\\ b=5.\end{cases}$

(2) 设 $z=m+ni$, $m,n\in\mathbf{R}$, 则 $|z|=\sqrt{m^2+n^2}=\sqrt{10}$,所以 $m^2+n^2=10$,①

又 $x_1z=(1-2i)(m+ni)=(m+2n)+(n-2m)i$ 为纯虚数,所以 $\begin{cases}m+2n=0,\\ n-2m\neq 0,\end{cases}$ ②

联立①②,解得 $\begin{cases}m=2\sqrt{2},\\ n=-\sqrt{2}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}m=-2\sqrt{2},\\ n=\sqrt{2},\end{cases}$ 所以 $z=2\sqrt{2}-\sqrt{2}\,i$ 或 $z=-2\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i$.

17.【解】(1) 由 $z(1+i)=2i$ 得 $z=\frac{2i}{1+i}=\frac{2i(1-i)}{(1+i)(1-i)}=i(1-i)=1+i$, ∴ $|z+3-$

$4i|=|4-3i|=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$.

(2)由(1)得 $z=1+i$,由复数的几何意义得向量 $\overrightarrow{OZ}=(1,1)$,$\overrightarrow{OZ}$ 绕原点 O 逆时针旋转$\frac{\pi}{2}$得到的 $\overrightarrow{OZ'}=(-1,1)$,则 $\overrightarrow{OZ'}$ 对应的复数为 $z'=-1+i$,则 $z\cdot z'=(1+i)\cdot(-1+i)=-2$.

18.【解】(1)$\because z=\log_2(1+m)+i\log_{\frac{1}{2}}(3-m)$ $(m\in\mathbf{R})$,当 z 在复平面内对应的点在第三象限时,$\begin{cases}\log_2(1+m)<0,\\ \log_{\frac{1}{2}}(3-m)<0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}0<1+m<1,\\ 3-m>1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}-1<m<0,\\ m<2,\end{cases}$ $\therefore m$ 的取值范围是$(-1,0)$.

(2)当 z 在复平面内对应的点在直线 $x-y-1=0$ 上时,$\log_2(1+m)-\log_{\frac{1}{2}}(3-m)-1=0$,即 $\log_2(1+m)+\log_2(3-m)=1$,

$\therefore\begin{cases}1+m>0,\\ 3-m>0,\\ (1+m)(3-m)=2,\end{cases}$ 即$\begin{cases}-1<m<3,\\ m^2-2m-1=0,\end{cases}$ 解得 $m=1-\sqrt{2}$ 或 $m=1+\sqrt{2}$.

19. (1)【解】由题意,$|\boldsymbol{\alpha}|=\sqrt{\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\alpha}}=\sqrt{(1-i)(1+i)+i(-i)}=\sqrt{1-i^2-i^2}=\sqrt{3}$,

$|\boldsymbol{\beta}|=\sqrt{\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\beta}}=\sqrt{3^2+4^2}=5$.

(2)①【证明】设 $\boldsymbol{\alpha}=(a+bi,c+di)$,$\boldsymbol{\beta}=(e-fi,g-hi)(a,b,c,d,e,f,g,h\in\mathbf{R})$,则 $|\boldsymbol{\alpha}|\cdot|\boldsymbol{\beta}|=\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}\times\sqrt{e^2+f^2+g^2+h^2}$,$|\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}|=|ae-bf+cg-dh+(ch+dg+be+af)i|=\sqrt{(ae-bf+cg-dh)^2+(ch+dg+be+af)^2}$.

由于$(a^2+b^2+c^2+d^2)(e^2+f^2+g^2+h^2)-(ae-bf+cg-dh)^2-(ch+dg+be+af)^2=(ag-ce)^2+(df-bh)^2+(ah+de)^2+(cf+bg)^2-2(bceh+bdeg+acfh+adfg)\geqslant 2(ag-ce)(df-bh)+2(ah+de)(cf+bg)-2(bceh+bdeg+acfh+adfg)=0$,当且仅当 $ag-ce=df-bh$,$ah+de=cf+bg$ 时等号成立,所以$|\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}|\leqslant|\boldsymbol{\alpha}|\cdot|\boldsymbol{\beta}|$.

②【解】设 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$,结合①得 $|\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}|=\sqrt{(a-2b+1)^2+(2a+b+1)^2}=\sqrt{5(a^2+b^2)+2(3a-b)+2}$,$|\boldsymbol{\alpha}|\cdot|\boldsymbol{\beta}|=\sqrt{1^2+1^2+1^2+2^2}\times\sqrt{1^2+a^2+b^2}=\sqrt{7+7(a^2+b^2)}$,令 $7+7(a^2+b^2)=5(a^2+b^2)+2(3a-b)+2$,化简得

$\left(a-\frac{3}{2}\right)^{2}+\left(b+\frac{1}{2}\right)^{2}=0$,即 $a=\frac{3}{2}$,$b=-\frac{1}{2}$,则 $z=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}$.